数理解析研究所講究録
650巻 1988年 117-128

離散時間戸田格子の周期解について

横浜国大．工　斎藤華子　(Noriko Saitoh)

２つの離散時間を持つ戸田格子（広田の双線形差分方程式）を線形化して得られた双対関係式における固有値は，その準周期解を与える Riemann ϑ-関数の中に Jacobi 多様体上の局所化変数として現われることを示す．

［1］　1+1 次元戸田格子

$$\frac{d^2Q_n}{dt^2} = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1}) \tag{1}$$

において

$$Q_n = \log \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

と従属変数変換すると

$$\frac{f_{n-1}(t)\, f_{n+1}(t)}{f_n^2(t)} - 1 = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n \tag{2}$$

となるが，右辺は離散時間の単位を δ として

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{f_n(t+\delta)\, f_n(t-\delta)}{f_n^2(t)} - 1 \right]$$

に等しい．そこで 1-離散時間戸田格子は $x = nh$ と空間も連続化して

$$\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{f(x,t+\delta)f(x,t-\delta)}{f^2(x,t)}-1\right]=\frac{1}{h^2}\left[\frac{f(x+h,t)f(x-h,t)}{f^2(x,t)}-1\right] \tag{3}$$

と表わされる[1]。

(3)には同一方向に進む多成分ソリトン解及び1周期解によって満たされる"非線形"Helmholtz方程式

$$\frac{1}{\delta^2}\left[\frac{f(u+\beta\delta)f(u-\beta\delta)}{f^2(u)}-1\right]=\sum_{i,j}E_{ij}\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}\log f(u)=\frac{1}{h^2}\left[\frac{f(u+\kappa h)f(u-\kappa h)}{f^2(u)}-1\right]$$

$$\begin{cases} f(u)=f(x,t), \quad u=(u_1,u_2,\cdots), \quad u_i=\kappa_i x+\beta_i t+\zeta_i \\ 2E_{ii}=\dfrac{1}{\delta^2}\mathrm{sh}^2\dfrac{\beta_i\delta}{2}=\dfrac{1}{h^2}\mathrm{sh}^2\dfrac{\kappa_j h}{2} \\ E_{ij}=\dfrac{h^2\delta^2}{h^2-\delta^2}\left[\mathrm{sh}(\beta_i\delta)\mathrm{sh}(\beta_j\delta)/\delta^4-\mathrm{sh}(\kappa_i h)\mathrm{sh}(\kappa_j h)/h^4\right] \end{cases}$$

が附随することが示されている[2~4]。

[2] 今回は，(3)を一般化した2-離散時間戸田格子に対する広田の双線形差分方程式[1]

$$\alpha f(\lambda+1,\mu,\nu)f(\lambda-1,\mu,\nu)+\beta f(\lambda,\mu+1,\nu)f(\lambda,\mu-1,\nu)+\gamma f(\lambda,\mu,\nu+1)f(\lambda,\mu,\nu-1)=0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma=0) \tag{4}$$

の周期解について考察する。

2-離散時間戸田格子に対する広田の双線形差分方程式は以下の2つの理由によっても，極めて一般的かつ重要な意味を持つ方程式であるということが推察されよう。

(I) 適当なパラメーターの極限操作によって，連続時間戸田格子，KP-方程式，KdV方程式，sine-Gordon方程式，Boussinesq方程式等の可積分な方程式に移行する。(by Hirota[1])

(II) 解の空間が知られているKP-系列の方程式の，すべて

の解によって満たされる．(by Miwa et. al.[5])

[3] さて，(4)は広田の Bilinear Bäcklund 変換の可解条件として導出されるのであるが，このことをゲージ変換

$$f_n(\ell,m) \to V(\ell,m,n) f_n(\ell,m)\ ,\quad U_\pm(n,\ell,m) \longrightarrow V(n,\ell,m) U_\pm(n,\ell,m)$$

に対して共変な形に書き直してみる[6]．(但し，$\lambda \equiv \ell-m-n$, $\mu \equiv \ell+m$, $\nu \equiv n$, $f(\lambda,\mu,\nu) \equiv f_n(\ell,m)$ とおいた．)

一般に，ゲージ共変な固有値方程式

$$\nabla_\pm f_n(\ell,m) = C_\pm E_\pm f_n(\ell,m) \tag{5}$$

$$\begin{cases} D_+ \equiv e^{\partial_\ell} - 1\ , \quad D_- \equiv e^{\partial_m} - 1\ , \quad \nabla_\pm \equiv U_\pm D_\pm U_\pm^{-1} \\ E_+ \equiv U_- \, e^{\partial_\ell + \partial_n} \, U_-^{-1}\ , \quad E_- \equiv U_+ \, e^{\partial_m - \partial_n} \, U_+^{-1} \end{cases}$$

を考えると，

$$[\,\nabla_+, E_-\,] = [\,\nabla_-, E_+\,] = 0 \tag{6}$$

が成り立つので，整合条件（可解条件）は

$$[\,\nabla_+, \nabla_-\,] = C_+ C_- \,[\,E_-, E_+\,] \tag{7}$$

となる．従って，(7)が満たされるとき(5)は f_n に対する2階線形差分方程式

$$\{\nabla_+, \nabla_-\} f_n(\ell,m) = C_+ C_- \{E_-, E_+\} f_n(\ell,m) \tag{8}$$

となる．

今，特に，

$$U_+(n,\ell,m) = g_n(\ell,m)\ ,\quad U_-(n,\ell,m) = g_{n-1}(\ell,m)$$

と n, ℓ, m 依存性を決めると，整合条件(7)は

$$\frac{g_n(l+1,m)\,g_n(l,m+1)}{g_n(l,m)\,g_n(l+1,m+1)} - c_+c_- \frac{g_{n+1}(l+1,m)\,g_{n-1}(l,m+1)}{g_n(l,m)\,g_n(l+1,m+1)} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (n\text{に依らない}) \tag{9}$$

となる。ここで

$$c_+c_- = -\frac{\gamma}{\alpha} \tag{10}$$

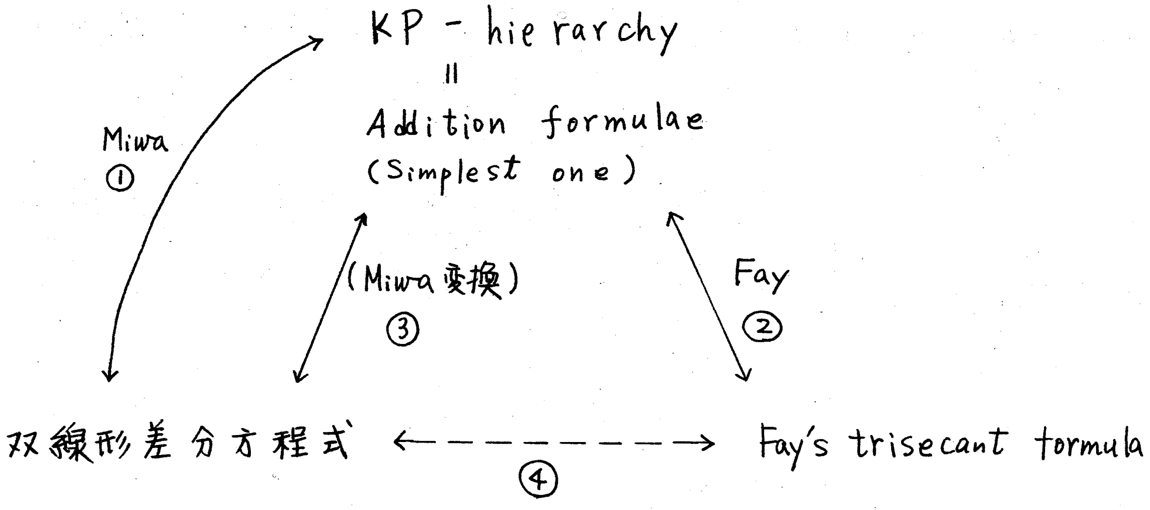
とおけば,(9)は双線形差分方程式(4)に他ならない.

(9)は,$\frac{\beta}{\alpha}$がnに依らないということ及び,固有値c_+c_-の導入によって,広田の双線形差分方程式(4)の1つの拡張になっている.

ところで,(5)は,$g_n(l,m)$と$f_n(l,m)$(これらは物理的にはポテンシャルと波動関数と考えられるが)との役割を入れかえても全く同じ形に書くことができて(duality),g_nに対する整合条件はf_nに対する(9)と同型の方程式を与え,このときg_nは線形差分方程式の解として求められる.従って,ポテンシャルは又,線形方程式をとくことで直接に求めることが出来る.以上のことを言いかえると,ゲージ共変な固有値方程式(5)は,広田のBilinear Bäcklund変換である様にゲージポテンシャルが選ばれたときに,ゲージポテンシャルと波動関数の双対性を満たす.そしてこのとき,線形方程式(8)をとくことで,successiveに非線形方程式(4)の解を得ることができる.

以上の意味において,(5)をduality relation,(8)を線形Bäcklund変換と呼ぶことにする.duality relationの固有値が周期解にどのように寄与するかは以下で考察する.

[4] さて，以下では双線形差分方程式の周期解について考察するが，そのprocessは下図とその説明①〜④に基ずく．



①：KP-hierarchyと双線形差分方程式との等価性は，Miwa (et. al.) によって示されている[5)].

②：KP-hierarchyは無限個の加法公式に等しい（Sato-Sato 7)）が，これらはJacobi多様体上のϑ-関数に関するFayのtrisecant formula[8)]に等しいということが示されている．（Fay ; Shiota 9) 参照）

③：KP-hierarchyのAddition formulaeのうちのSimplest oneはある変換[5-1)]（Miwa変換とここでは呼ぶが）によって双線形差分方程式(4)に等価であるということを直接的に示すことができる．

④：①,③と②によって双線形差分方程式の解をFayのtrisecant formulaからJacobi多様体上のϑ-関数を用い

て構成できる．

以下では，③を考察し，④によって周期解を構成し，duality relation における固有値が，Jacobi 多様体上の局所化変数に対応していることを明らかにする．

(4-1) KP-hierarchy の Simplest addition formula (即ち, Fay's trisecant formula) と双線形差分方程式の等価性を，Miwa変換を用いて導出する．

Simplest addition formula [7] は

$$(z_1-z_0)(z_3-z_2)\tau(t+[z_0]+[z_1])\tau(t+[z_2]+[z_3])$$
$$-(z_2-z_0)(z_3-z_1)\tau(t+[z_0]+[z_2])\tau(t+[z_1]+[z_3])$$
$$+(z_3-z_0)(z_2-z_1)\tau(t+[z_0]+[z_3])\tau(t+[z_1]+[z_2])=0 \tag{11}$$

但し，

$$[z]\equiv\left(z,\frac{z^2}{2},\frac{z^3}{3},\cdots\right)$$

であり，例えば τ の argument は

$$t+[z_i]+[z_j]=\left(t_1+z_i+z_j,\ t_2+\frac{z_i^2+z_j^2}{2},\ t_3+\frac{z_i^3+z_j^3}{3},\cdots\right)$$

となる．Miwa変換

$$t_n=\sum_j p_j\frac{z_j^n}{n} \tag{12}$$

を施すと，p_i から p_i+1 への変換は t_n に

$$t_n\to t_n'=\left(\sum_j p_j\frac{z_j^n}{n}\right)+\frac{z_i^n}{n}=t_n+\frac{z_i^n}{n}$$

なる変換をひきおこす．従って，

$$t\ \longrightarrow\ t+[z_i]+[z_j]$$

は

$$p_i \longrightarrow p_i + 1 \,, \quad p_j \longrightarrow p_j + 1$$

に等価である．そこで，

$$\tau(t) \equiv \tau(p_1, p_2, p_3) \,, \qquad z_0 \equiv 0$$

とおくと，Simplest addition formula は

$$\begin{aligned} & z_1(z_2 - z_3)\tau(p_1+1, p_2, p_3)\tau(p_1, p_2, p_3+1) \\ + & z_2(z_3 - z_1)\tau(p_1, p_2+1, p_3)\tau(p_1+1, p_2, p_3+1) \\ + & z_3(z_1 - z_2)\tau(p_1, p_2, p_3+1)\tau(p_1+1, p_2+1, p_3) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

となる．ここで

$$\tau(p_1, p_2, p_3) \equiv f(\lambda, \mu, \nu) \,, \tag{14-a}$$

$$\lambda = p_2 + p_3 + 1 \,, \quad \mu = p_1 + p_3 + 1 \,, \quad \nu = p_1 + p_2 + 1 \tag{14-b}$$

$$z_1(z_2 - z_3) = \alpha \,, \quad z_2(z_3 - z_1) = \beta \,, \quad z_3(z_1 - z_2) = \gamma \tag{14-c}$$

とおくと，

$$\alpha f(\lambda+1, \mu, \nu) f(\lambda-1, \mu, \nu) + \beta f(\lambda, \mu+1, \nu) f(\lambda, \mu-1, \nu) + \gamma f(\lambda, \mu, \nu+1) f(\lambda, \mu, \nu-1) = 0$$

となり，これは双線形差分方程式(4)に他ならない．

(4-2) 双線形差分方程式の準周期解の構成

KP-hierarchy の τ-関数は Jacobi 多様体上の ϑ-関数を用いて

$$\tau(t) = \tau(t, \varsigma) = \exp(Q(t))\,\vartheta(At + \varsigma) \tag{15}$$

と与えられる．[10,9] 但し，

$$t = (t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots) \,, \quad A = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \quad a_n \in \mathbb{C}^g$$

$$Q(t)=\sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} t_m t_n \quad , \quad Q_{mn}=Q_{nm}\in \mathbb{C} \tag{16}$$

で，a_n，Q_{nm} は $\tau(t)$ が Jacobi 多様体上の関数であるということから，次の様に決定される．即ち，

$a_{\ell n}$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\ell n} z^{n-1} dz \equiv \omega_\ell \quad (\ell=1,2,\cdots,g) \tag{17}$$

が才1種Abel微分であるということより決定される．

Q_{mn} は，η_n を才2種Abel微分 $\omega(x,y)$ を用いて

$$\omega(x,y)\equiv-\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(x)y^{n-1}dy \tag{18}$$

と定義するとき，$g \simeq p$ で

$$\int_p^g \eta_n = z^{-n} - z\sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm}\frac{z^m}{m} \tag{19}$$

となることにより決定される．

(4-2-a) 以上のことから Q_{nm} を具体的に計算する．

一般に，$x,y\in\mathbb{C}$ に対して才2種微分を

$$\omega(x,y)=\frac{d^2}{dxdy}\log E(x,y)\ dxdy \tag{20}$$

と表現できる．[8] 但し，$E(x,y)$ は prime form と呼ばれる関数で，大事な性質の一つは $x\simeq y$ で

$$E(x,y)=(x-y)\left[1+O(x-y)\right] \tag{21}$$

の形を持つことである．そこで，(20)を用いて(18)を計算すると

$$-\int^z \eta_n = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\log\frac{E(x\,y)}{x-y}\right]_{y=x=0}\frac{z^m}{m}-\frac{1}{z^n}$$

$$\equiv -\frac{1}{z^n}+z\sum_{m=1}^{\infty}Q_{nm}\frac{z^m}{m}$$

((19)より)

であるから

$$Q_{nm} = \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!(m-1)!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\log\frac{E(x,y)}{x-y}\Bigg|_{y=x=0} \qquad (22)$$

とかめられる．そこで(16)に(22)を代入し，Miwa変換を施すと，

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} t_n Q_{nm} t_m \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sum_i p_i \frac{z_i^n}{n}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\log\frac{E(x,y)}{x-y}\right]_{y=x=0}\sum_j p_j\frac{z_j^m}{m} \\ &= \sum_{i,j}\frac{p_i p_j}{2}\log\frac{E(z_i,z_j)}{z_i-z_j} \qquad (23)\end{aligned}$$

となる．

(4-2-b) ヌ，AをMiwa変換すると，

$$\begin{aligned} At &= \sum_n a_n t_n = \sum_n a_n \sum_j p_j \frac{z_j^n}{n} = \sum_j p_j \sum_n \frac{z_j^n}{n} a_n \\ &= \sum_j p_j \int^{z_j} dz \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_j p_j \int^{z_j} \omega \qquad (24)\end{aligned}$$

ここで ω は p というRiemann面上のある点における局所座標で書かれているから，この座標系について

$$\zeta_j = \zeta_j(z_j)$$

であるとすれば，

$$\int_{z_p}^{z_j}\omega = \int_p^{\zeta_j}\omega \equiv w(\zeta_j) \qquad (25)$$

となる．(23)，(24)，(25)を(15)に代入すれば，双線形差分方程式の準周期解は，

$$\prod_{i,j}\left(\frac{E(z_i,z_j)}{z_i-z_j}\right)^{\frac{p_i p_j}{2}} \vartheta\left(\sum_j p_j w(\zeta_j(z_j)) + \zeta\right) \qquad (26)$$

とかめられる．

ここで，局所化変数の組$\{z_i\}$の中の任意の3ケのものに対しては，(14−c)を通して duality relation (5) の固有値の積 C_+C_- との間に

$$C_+C_- = -\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{z_3(z_2-z_1)}{z_1(z_2-z_3)}$$

なる関係が存在する．即ち，duality relation (5) の固有値は，準周期解(26)の中に，局所化変数 z_j を通して入ってくる．

[5] 以上の議論を，既に周期解については厳密解が得られている[11] 1+1次元戸田格子の場合と対応させてみよう．（参照，戸田盛和「非線形格子力学」（岩波書店））．

特に ϑ-関数の時間依存性についてみると下図の様になる．

1+1次元戸田格子の周期解	1+1次元戸田格子	双線形差分方程式の解(26)からのreduction
$\vartheta(nc+\underset{\sim}{d(t)})$	$d(t) \longleftrightarrow At$	$\vartheta(\underset{\sim}{At}+\zeta)$
$d_\ell = -\sum_{j=1}^{g}\int_{\mu_0}^{\mu_j(0)} \omega_\ell(\lambda)$		
$C_\ell = \int_{\infty}^{\infty} \omega_\ell$		
$d_\ell(t) = d_\ell(0) - C_{\ell,g-1}\,t$		$t_n = 0$ for $n \geq 2$
where		$(At)_\ell = a_{\ell 1} t_1$
$-C_{\ell,g-1} = \frac{\omega_\ell}{d\lambda}\Big\vert_{\lambda\to\infty}$		$a_{\ell 1} = \frac{\omega_\ell}{dz}\Big\vert_{z\to 0}$
	$\lambda \longleftrightarrow \frac{1}{z}$	
	$\mu_j(0) \longleftrightarrow \frac{1}{z_j}$	

但し，μ は縮退していない固有値

ω は有理型微分

λ は固有空間の変数

$\mu_j(0)$ は lattice number

$k=0$ における j 番めの μ

μ_0 は λ 空間のある点

∞, ∞' は異なるRiemann面の無限遠点

$\mu_j(0)$ は振動する固有値であるから，これが $1/z_j$ に対応することがわかる．

このようにして (26) は矛盾なく 1+1 次戸田格子の準周期解を再現している．

[6] まとめ

1) 双線形差分方程式の周期解をMiwa変換を用いて構成した．

2) 周期解のパラメーターとduality relationの固有値との関係を明らかにした．

参考文献：

1) R. Hirota, Nonlinear Integrable systems, edited by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983), p. 17.

R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) p. 3785.

2) M. Toda, "Nonlinear lattice and a nonlinear difference-differential equation", Nonlinear Integrable Systems, edited by M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983)

3) M. Toda, RIMS 講究録, 388 (1980) P. 72

4) N. Saitoh and M. Toda, Advances in nonlinear waves, vol. II. (Research Notes in Mathematics 111) edited by L. Debnath, (Pitman 1985) P. 214.

5-1) T. Miwa, Proc. Japan Acad. 58 (1982) P. 9.

5-2) E. Date, M. Jimbo and T. Miwa, J. Phys. Soc. Jpn. 51 P. 4116, P 4125 (1982)

6) N. Saitoh and S. Saito, J. Phys. Soc. Jpn. 56 P. 1664 (1987)

7) M. Sato and Y. Sato, Proc. U.S.-Japan Seminar, Tokyo 1982, P. 259. (North-Holland 1983).

8) J. D. Fay, Lecture notes in mathematics 352 (Springer, 1973)

9) T. Shiota, Invent. math. 83 P 333.

10) M. Mulase, J. Diff. Geom. 19 P 403.

11) E. Date and S. Tanaka, Progr. Theor. Phys. 55 (1976.) P 457.